الموضوع: محاضرة (1) 14/3/2018 الأربعاء

## المعادلات التفاضلية الخطية في الساحة العقدية

1. سنرمز بـ $Z$ و $W$ للأعداد عقدية ونرمز $W(Z)$ و $f(Z,W)$ للدوال (توابع) ذوات قيم عقدية بمتغير عقدي واحد أو متغيرين عقديين على الترتيب.

- نقول عن دالة عقدية $f(Z,W)$ أنها تحليلية (هولومورفية) في منطقة $D$ من الفضاء العقدي $(Z,W)$ إذا كانت هذه الدالة مستمرة هناك وكانت تمتلك مشتقين $f'_{W}(Z,W)$ و $f'_{Z}(Z,W)$ مستمرين في $D$.

- ونبرهن في هذه الحالة (أي عندما يكون تحليلي) صحة النشر التالي (أي أنه يمكن كتابته حسب قوى $(Z-Z_0)$ و $(W-W_0)$)

$$Z = \{(Z,W) : |Z-Z_0| \leq \alpha , |W-W_0| \leq b\}$$

بفرض أن $Z \subset D$

مبرهنة الوجود والوحدانية (نظرية الوجود): **مهمة**

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى

$$\frac{dw}{dZ} = f(Z, w(Z)) \quad [1]$$

ولنفرض أن الدالة $f(Z,W)$ تحليلية في منطقة $D$ (مجموعة $C^2$) وتحوي الأسطوانة الثنائية

$$[Z : |Z-Z_0| \leq a ; |W-W_0| \leq b] \quad (*)$$

ولنفرض أن $|f| \leq M$ في $Z$ (أي دالة محدودة)

و $f(Z,W)$ دالة تحقق في $D$ ما يسمى شرط ليبشتز بالنسبة للمتحول $W$ أي:

شرط ليبشتز: يوجد عدد موجب $A$ بحيث تتحقق المتراجحة $|Z-Z_0| \leq a$ من أجل $Z$ ولأي قيمتين $W_1, W_2$ للمتحول $W$:

$$|W_1 - W_0| \leq b \quad \text{و} \quad |W_2 - W_0| \leq b$$

تتحقق العلاقة التالية

$$|f(Z,W_1) - f(Z,W_2)| \leq A|W_1 - W_2|$$

يسمى $A$ بثابت ليبشتز.

ونفرض أن [2] $[W = W_0$ عندما $Z = Z_0]$

فإنه عندئذ يوجد حل وحيد $W(Z) = w(Z)$

للمعادلة (1) ويحقق الشرط (2)

وهذا الحل معرف ومستمر في القرص الدائري

$K: |Z - Z_0| \le \alpha = \min(a, \frac{b}{M})$ على الأقل.

البرهان

سوف نثبت أولاً أن جميع التقريبات المتتالية (الحل) لا تخرج عن المنطقة $D$

وذلك كما يلي:

أولاً: لدينا التقريب الصفري $w_0(Z) = w_0$

وهذا واضح أنه يقع في المنطقة $D$ (من شرط البداية (2)) (فهي نقطة مركزية للمنطقة)

ومن أجل التقريب الأول لدينا العلاقة

$$w_1 = w_0 + \int_{Z_0}^{Z} f(Z, w_0)\, dZ \quad (1)$$

وإذا أخذنا في هذه العلاقة تغير $Z$ بأن تكون $|Z - Z_0| \le \alpha$

وبما أن $\alpha \le a$ وبالتالي سوف تتعين قيم الدالة $f(Z, w)$ من أجل $Z$ هذه

ومن القيمة الثابتة) في المنطقة $D$ بحيث فيها يكون $|f(Z, w_0)| \le M$

وبالتالي يمكن كتابة العلاقة الأخيرة (1) على الشكل

$$|w_1 - w_0| \le M \left| \int_{Z_0}^{Z} dZ \right| = M |Z - Z_0| \le M \alpha$$

وبما أن $\alpha \le \frac{b}{M}$ فإن العلاقة الأخيرة توضح أن

$$|w_1 - w_0| \le b$$

أي أن $w_1$ لا تخرج عن المنطقة $D$ أيضاً.

ومن أجل التقريب الثاني $w_2(Z)$ نضع

$$w_2 = w_0 + \int_{Z_0}^{Z} f(Z, w_1)\, dZ \quad (2)$$

من أجل $|Z - Z_0| \le \alpha$ فإنه أدلة الدالة $f(Z, w_1)$ لا تخرج عن المنطقة $D$

يعني $f(Z, w_1)$ معرف ويحقق $|f(Z, w_1)| \le M$

نكتب أيضاً:

$$|w_2 - w_0| \le M |Z - Z_0| \le M \alpha \le b$$

$$|w_2 - w_0| \le b$$

هنا يبين أن $w_2$ أيضاً لا تخرج عن المنطقة $D$

الموضوع :

/ /

وعلى وجه العموم بعد تعريف التقريب رقم $(n-1)$ يكون لدينا التقريب النوني :

$$w_n = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(z, w_{n-1})\, dz \quad \text{--- (N)}$$

ومن هنا وبفرض ان قيم $(w_{n-1})$ لا تخرج عن المنطقة $D$ عندما تتغير $z$ في الفترة $|z - z_0| \leq \alpha$ عندئذٍ لدينا $|f(z, w_{n-1})| \leq M$ تحقق وكذلك كذلك بالنسبة للدالة $w_n$ تحقق العلاقة

$$|w_n - w_0| \leq M\,|z - z_0| \leq M\alpha \leq b$$

أي أن التقريب رقم $n$ لا يخرج أيضاً عن نفس المنطقة $D$

وهكذا بالاستقراء الرياضي نبرهن على أن جميع التقريبات المتتالية لا تخرج عن المنطقة $D$ إذا كان $|z - z_0| \leq \alpha$

والآن سنبرهن وضمن شروط نظرية الوجود ان متتابعة الدالة $w_n(z)$ نهائية $w(z)$ دالة مستمرة في المجال $|z - z_0| \leq \alpha$ ذات مشتق مستمر وكذلك يكون $w(z) = w(z)$ تحقق المعادلة (1) وتحقق الشرط (2)

من اجل ذلك لنكتب $w_n(z)$ على الشكل التالي :

$$w_n(z) = w_1(z) + [w_2(z) - w_1(z)] + \cdots + [w_n(z) - w_{n-1}(z)] \quad \text{(3)}$$

بمفهوم النهاية فترى ان $w_n(z)$ يقترب من نهاية $w(z)$، هذه النهاية تساوي مجموع السلسلة اللانهائية التالية :

$$w_1(z) + [w_2(z) - w_1(z)] + \cdots + [w_n(z) - w_{n-1}(z)] + \cdots \quad \text{(4)}$$

شريطة ان تكون هذه السلسلة متقاربة.

نثبت الآن اولاً تقارب السلسلة (4) كما يلي :

نأخذ الصيغتين التاليتين :

$$w_n(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(z, w_{n-1}(z))\, dz \quad (**)$$

$$w_{n+1}(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(z, w_n(z))\, dz$$

ونجد بالطرح

$$w_{n+1} - w_n = \int_{z_0}^{z} [f(z, w_n) - f(z, w_{n-1})]\, dz$$

استخدام شرط ليبشتز للدالة $f(z, w)$ يكون :

الموضوع :   / /

$$|w_{n+1} - w_n| \le \int_{z_0}^{z} |f(z, w_n) - f(z, w_{n-1})| \, |dz|$$

$$\le A \int_{z_0}^{z} |w_n - w_{n-1}| \, |dz| \quad (5)$$

وبملاحظة أن الكمية العليا للقيمة $|w_2 - w_1|$ في المجال $|z - z_0| \le \alpha$

فإنه بتكرار العلاقة (5) نجد ما يلي (مع متراجحة ...)

$$|w_3 - w_2| \le A \int_{z_0}^{z} |w_2 - w_1| \, |dz|$$

$$\le A N \left| \int_{z_0}^{z} dz \right|$$

$$\le A N \frac{|z - z_0|}{1!}$$

$$|w_4 - w_3| \le A \int_{z_0}^{z} |w_3 - w_2| \, |dz|$$

$$\le A \cdot A N \int_{z_0}^{z} \frac{|z - z_0|}{1!} |dz|$$

$$\le N \cdot A^2 \cdot \frac{|z - z_0|^2}{2!}$$

وبصورة عامة يكون لدينا بالعودة إلى (5)

$$|w_{n+1} - w_n| \le N A^{n-1} \frac{|z - z_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

وبتبديل كل $|z - z_0|$ بقيمتها والكل بـ $\alpha$ يكون

$$|w_{n+1} - w_n| \le N \frac{(A\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (6)$$

وبغض النظر عن الحد الأول في السلسلة

السابقة (4) فإن كل حد من حدودها هو أصغر من الحد المقابل في السلسلة العددية

ذات الحدود الموجبة التالية :

$$N + NA\alpha + N\frac{(A\alpha)^2}{2!} + N\frac{(A\alpha)^3}{3!} + \dots \quad (7)$$

وهذه السلسلة (7) تمثل منشور التابع $N e^{A\alpha}$ فهي إذن متقاربة

وبالتالي فالسلسلة (4) متقاربة بانتظام في المجال $|z - z_0| \le \alpha$

الموضوع:  / /

ماذا سمينا $\bar{w}(z)$ كنها لمجموع المتسلسلة ④ فإن $\bar{w}(z)$ تكون داله مستمره ويكون

$\bar{w}(z) = \lim w_n(z)$

نهاية موجودة وعبارة الداله مستمره في المجال $|z - z_0| \leq \alpha$.

ويبقى اثبات ان $\bar{w}(z) = \bar{w}$ تحقق المعادله [1] ولهذا يكفي اثبات ان

$$W(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(z, \bar{w}) dz \quad ⑧$$

وباستخدام العلاقة ③ يمكن ان نكتب المتراجحة ⑧ بالشكل

$$8 \Rightarrow |W(z) - w_0 - \int_{z_0}^{z} f(z, w) dz|$$

$$= |w(z) - w_n + \int_{z_0}^{z} [f(z, w_{n-1}) - f(z, w)] dz|$$

$$\leq |\bar{w}(z) - w_n| + A \int_{z_0}^{z} |w_{n-1} - w| |dz| \quad ⑨$$

ونفرض ان $\epsilon > 0$ معطى يمكننا ان نجد دوماً عدداً $n$ كبير بما فيه الكفاية بحيث يكون

$|w_{n-1} - w| < \epsilon$ و $|w - w_n| < \epsilon$

في المجال $|z - z_0| \leq \alpha$.

وتأخذ العبارة ⑨ الشكل

$$\leq \epsilon + A \epsilon \int_{z_0}^{z} |dz|$$

$$= \epsilon + A\epsilon |z - z_0|$$

$$\leq \epsilon (1 + A\alpha)$$

وبما ان هذا المقدار يمكن ان نجعله صغيراً جداً وذلك بالتالي فإنه يكون

$$|w - w_0 - \int_{z_0}^{z} f(z, w) dz| = 0$$

اذن ⑧ محققة وهو المطلوب.

$$w(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(z, w(z)) dz \quad ⑧$$

وباعتبار الطرف الايمن في قابل للاشتقاق فإن الطرف الايسر ايضاً قابل للاشتقاق ونكتب

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w(z))$$

وبالتالي فإن الداله $w(z)$ تحقق المعادله [1] وانه من العلاقة ⑧ نجد

$w = w_0$ فإن $z = z_0$ وهو المطلوب

تم برهان الوجود

(ص)